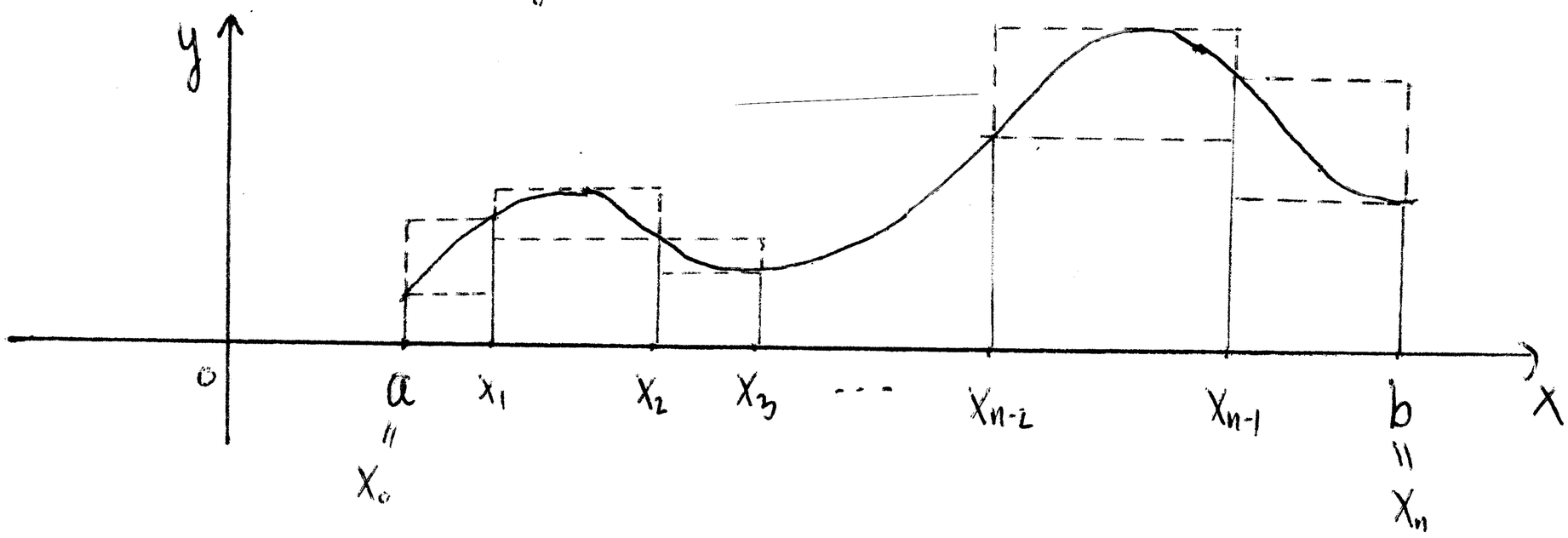
1. Integralrechnung

Ziel: Ein geeignetes Flächenmaß einzuführen.

Das Riemannsche Integral



Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, $x_0 := a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt Zerlegung von $[a,b]$.

$I_k := [x_{k-1}, x_k]$ heißt das k-te Teilintervall von Z, $(k = 1, \dots, n)$.

$\|Z\| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}$ heißt Feinheit von Z.

Seien Z_1, Z_2 zwei Zerlegungen von $[a,b]$.

Dann heißt Z_2 Verfeinerung von Z_1 wenn $Z_1 \subseteq Z_2$.

Beispiel: In $[0,1]$ ist $Z_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\}$ eine Verfeinerung von $Z_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Def: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von $[a,b]$. Dann:

$$\overline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) \qquad \text{(Obersumme von } f \text{ bzgl. } Z)$$

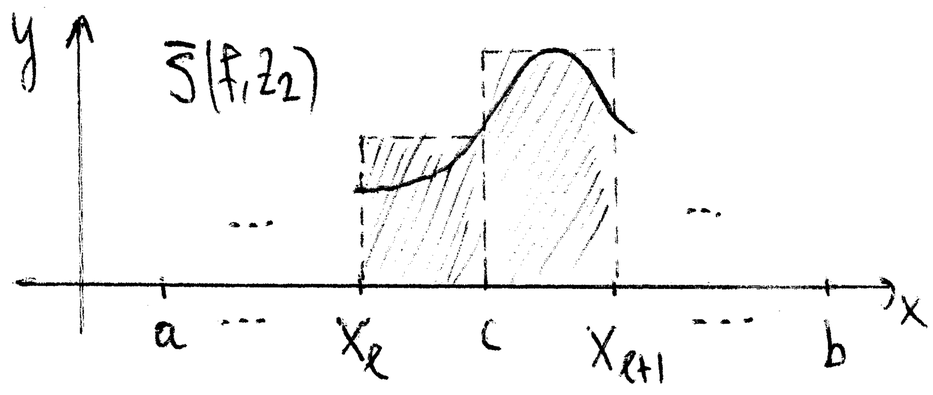
$$\underline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x) \qquad \text{(Untersumme von } f \text{ bzgl. } Z).$$

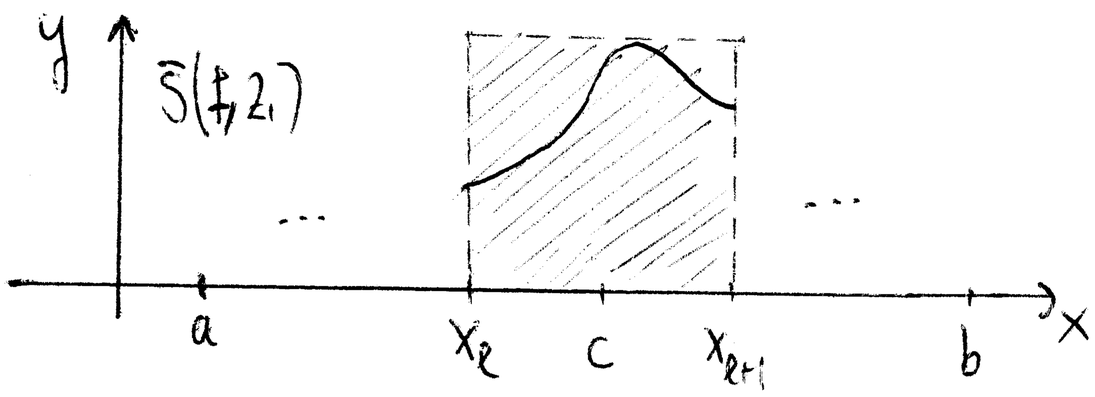
Bem: $\overline{S}(f,Z)$ (bzw. $\underline{S}(f,Z)$) ist der Flächeninhalt der oberen (bzw. unteren) Treppenfunktion (s. Skizze auf S. 5).

Lemma 1.1: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$. Wenn $Z_1 \subseteq Z_2$ gilt:

a) $\overline{S}(f,Z_1) \geq \overline{S}(f,Z_2)$ b) $\underline{S}(f,Z_1) \leq \underline{S}(f,Z_2)$.

Beweis: zu a): Sei $Z_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$.
OBdA darf man $|Z_2| = |Z_1| + 1$ voraussetzen (warum?)
Also $Z_2 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_\ell, c, x_{\ell+1}, \dots, x_n = b\} = Z_1 \cup \{c\}$.





$$\overline{S}(f,Z_1) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x\in I_k} f(x).$$

$$\overline{S}(f,Z_2) = \sum_{k=1}^{\ell} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x\in I_k} f(x) + (c - x_\ell) \sup_{x\in[x_\ell,c]} f(x) + (x_{\ell+1} - c) \sup_{x\in[c,x_{\ell+1}]} f(x) +$$

$$\sum_{k=\ell+2}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x\in I_k} f(x) \Longrightarrow$$

$$\overline{S}(f,Z_1) - \overline{S}(f,Z_2) = \underbrace{(x_{\ell+1} - x_\ell)}_{x_{\ell+1} - c + c - x_\ell} \sup_{x\in I_{\ell+1}} f(x) - (c - x_\ell) \sup_{x\in[x_\ell,c]} f(x) - (x_{\ell+1} - c) \sup_{x\in[c,x_{\ell+1}]} f(x)$$

$$= (x_{\ell+1} - c) \underbrace{\left(\sup_{x\in I_{\ell+1}} f(x) - \sup_{x\in[c,x_{\ell+1}]} f(x) \right)}_{\geq 0 \text{ denn } [c,x_{\ell+1}] \subseteq I_{\ell+1}} + (c - x_\ell) \underbrace{\left(\sup_{x\in I_{\ell+1}} f(x) - \sup_{x\in[x_\ell,c]} f(x) \right)}_{\geq 0 \text{ denn } [x_\ell,c] \subseteq I_{\ell+1}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,Z_1) - \overline{S}(f,Z_2) \geq 0 \Rightarrow \overline{S}(f,Z_1) \geq \overline{S}(f,Z_2).$$

$\square$

Konsequenzen:

i) Für zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt stets (nach Lemma 1.1)

$$\underline{S}(f, Z_1) \leq \underline{S}(f, Z_1 \cup Z_2) \underset{\text{trivial}}{\leq} \overline{S}(f, Z_1 \cup Z_2) \leq \overline{S}(f, Z_2).$$

[$Z_1 \cup Z_2$ ist Verfeinerung von Z_1 und Z_2].

ii) Nach i) existieren

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \overline{S}(f, Z) \qquad \text{(Oberintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

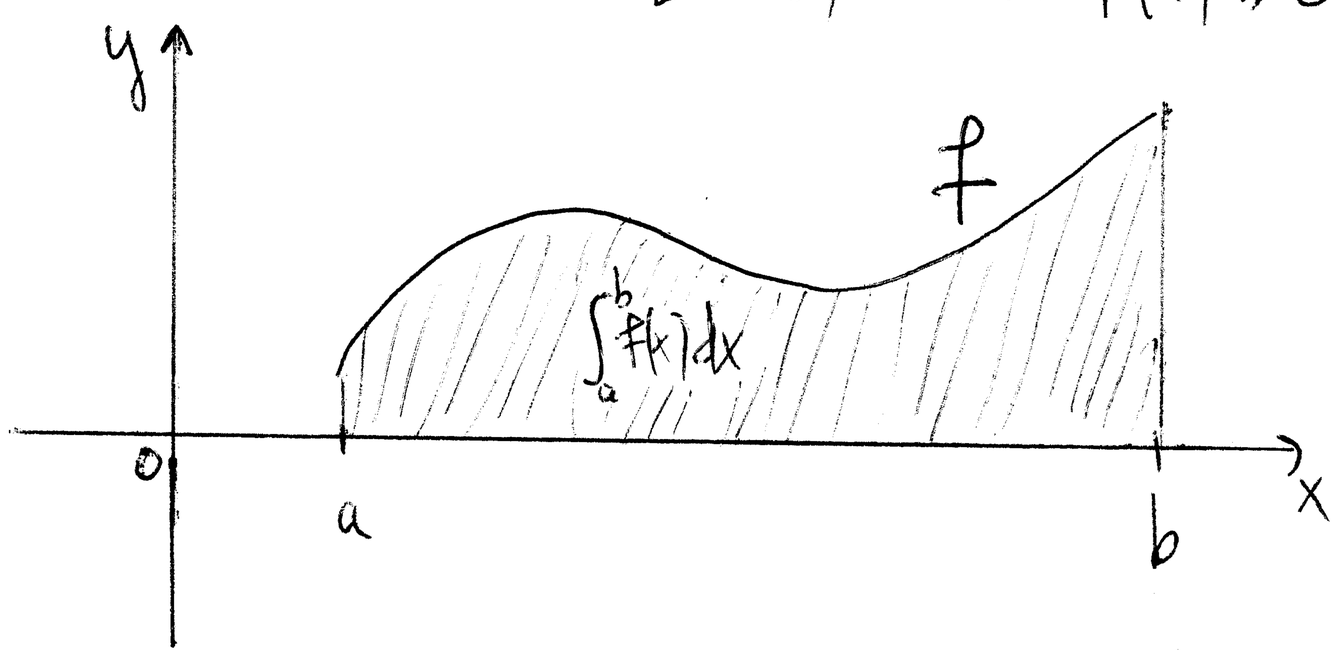
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \underline{S}(f, Z) \qquad \text{(Unterintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

und es gilt stets $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Def: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Gilt $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, so heißt f (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$ und es wird definiert $\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx \; \left(= \overline{\int_a^b} f(x)dx\right)$.

Bem: $\int_a^b f(x)dx$ ist ein Maß für den Flächeninhalt der Punktmenge zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich des Intervalls $[a,b]$, wenn $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$.



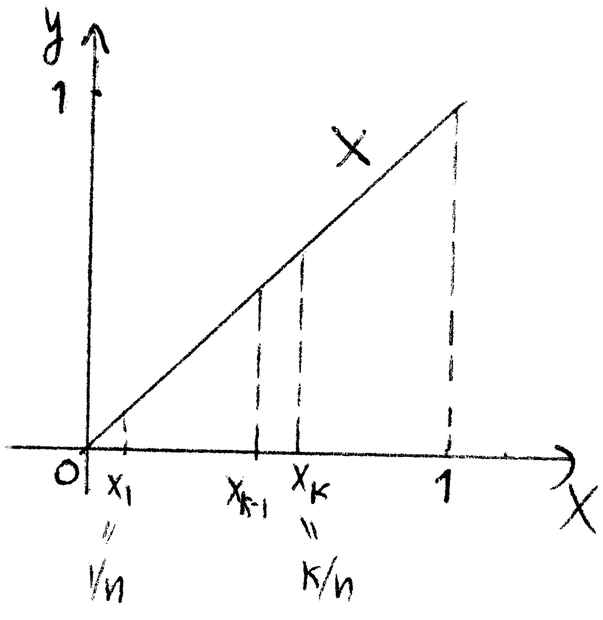
Lemma 1.2 (ohne Beweis)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|Z_n\|=0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,Z_n)=\int_{\bar a}^{b}f(x)\,dx \quad\text{und}\quad \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,Z_n)=\int_{\underline a}^{b}f(x)\,dx. \qquad \square$$

Also muss zur Berechnung von Ober- und Unterintegralen nicht die Gesamtheit aller Zerlegungen betrachtet werden

$$\left[\int_{\underline a}^{b}f(x)\,dx=\inf_{Z\text{ Zerleg. von }[a,b]}\overline{S}(f,Z)\right]$$



Beispiele: 1) Wir zeigen $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

Für $n\in\mathbb{N}^*$ betrachte man die Zerlegung $Z_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$. $\left[x_k=\frac{k}{n}\ \forall k\le n,\ \|Z_n\|=\frac{1}{n}\right]$

Dann ist $\overline{S}(f,Z_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$,

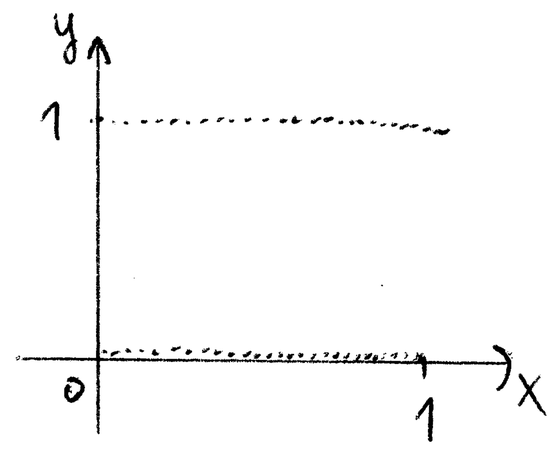
$\underline{S}(f,Z_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

Also $\int_0^1 x\,dx\overset{1.2}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(x,Z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$ und

$\int_0^1 x\,dx\overset{1.2}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}(x,Z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$. Also ist die Funktion x integrierbar über $[0,1]$ und es gilt $\int_0^1 x\,dx=1/2$.

2) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$



Sei $Z = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$.
Da jedes Intervall I aus $\mathbb{R}$ (mit $|I| \geq 2$) sowohl rationale als auch irrationale Punkte enthält folgt

$$\overline{S}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1 \text{ und}$$

$$\underline{S}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot 0 = 0. \text{ Daraus folgt}$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [0,1]} \overline{S}(f,Z) = 1 \text{ und } \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup_{Z \text{ Zerleg. von } [0,1]} \underline{S}(f,Z) = 0.$$

$0 \neq 1 \Rightarrow f$ ist nicht integrierbar über $[0,1]$.

Satz 1.3: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

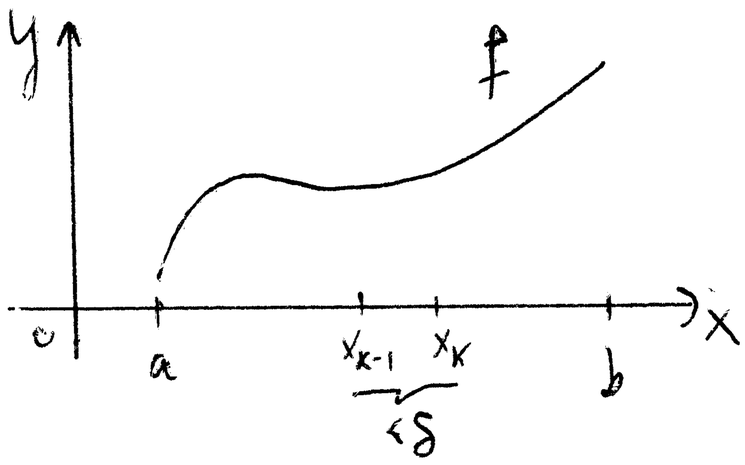
a) f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar

b) f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar.

Beweis: Zu a): Wir zeigen $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ $\left(\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \Rightarrow f \text{ integrierbar über } [a,b]\right)$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. f stetig $\overset{\text{Satz 0}}{\Longrightarrow}$ f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ sodass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/_{b-a}$ für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$.

Sei Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$.



$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) - \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\underbrace{\left(\sup_{x\in I_k} f(x)-\inf_{x\in I_k} f(x)\right)}_{\leq \varepsilon/b-a \text{ denn } x_k-x_{k-1}<\delta} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Zu b): Die Integrierbarkeit von f zeigt man wie in a). $\square$

<u>Satz 1.4</u>: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, $c\in\mathbb{R}$. Dann:

i) $f+g$ ist integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

ii) cf ist integrierbar und es gilt $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

iii) $f\leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

iv) fg ist integrierbar.

v) $1/f$ ist integrierbar falls $\exists m>0$ mit $|f(x)|\geq m$ $\forall x\in[a,b]$.

vi) $|f|$ ist integrierbar und es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{\Delta}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx$.

<u>Beweis</u>: i), ii), iii), v), vi) folgen leicht aus der Definition des Integrals. i)+ii) $\Rightarrow$ $f\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$ ist linear; iii) $\Rightarrow$ $f\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$ ist monoton.

Zu iv): Da $fg=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ reicht es z.z, dass h integrierbar $\Rightarrow h^2$ integrierbar. $\square$

<u>Satz 1.5</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und $c\in[a,b]$. Dann:
f ist integrierbar über $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f ist integrierbar über $[a,c]$ und $[c,b]$.

In diesem Fall gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

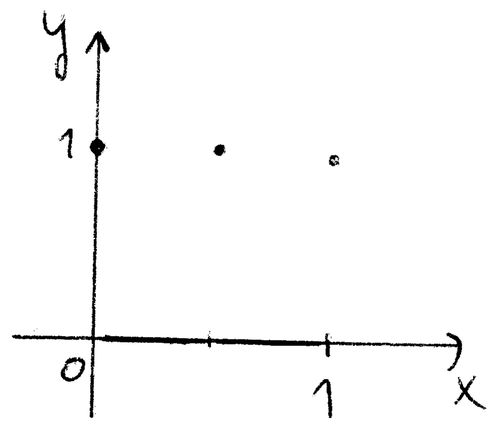
<u>Beweis:</u> Folgt leicht aus der Def. des Integrals.

<u>Satz 1.6:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.
Sei $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f_1(x)\neq f(x)$ nur für endlich viele $x\in[a,b]$
Dann existiert $\int_a^b f_1(x)dx$ und es gilt $\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

<u>Beweis:</u> Folgt leicht aus der Def. des Integrals. $\square$

<u>Beispiel:</u> Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0\ \forall x\in[0,1]$, und

$$f_1:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_1(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\{0,\frac{1}{2},1\}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$



Nach 1.6 gilt $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

Aus 1.3a), 1.5 und 1.6 folgt unmittelbar:

<u>Korollar 1.7:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig.
Dann ist f integrierbar über $[a,b]$. $\square$

<u>Satz 1.8:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann

a) $(b-a)\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

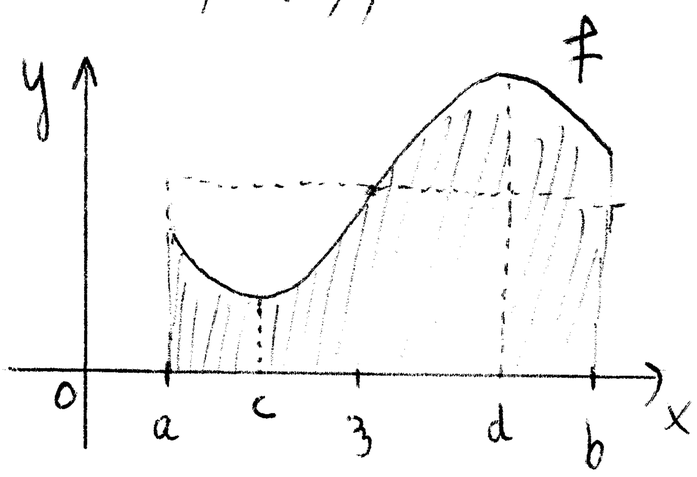
b) Ist f stetig, so existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.
[MWS der Integralrechnung]

<u>Beweis:</u> a) Folgt aus $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\ \forall x\in[a,b]$ und

Satz 1.4 iii).

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\overset{\text{Satz 5.15, Ana I}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, c,d\in[a,b]$ mit $f(c)\leq f(x)\leq f(d)$ $\forall x\in[a,b]$. Aus a) folgt $(b-a)f(c)\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)f(d)$,

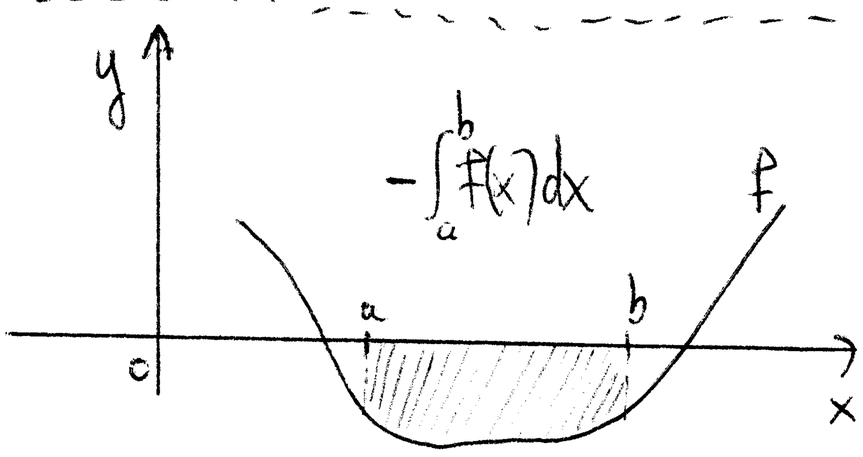
also $f(c)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq f(d)$.

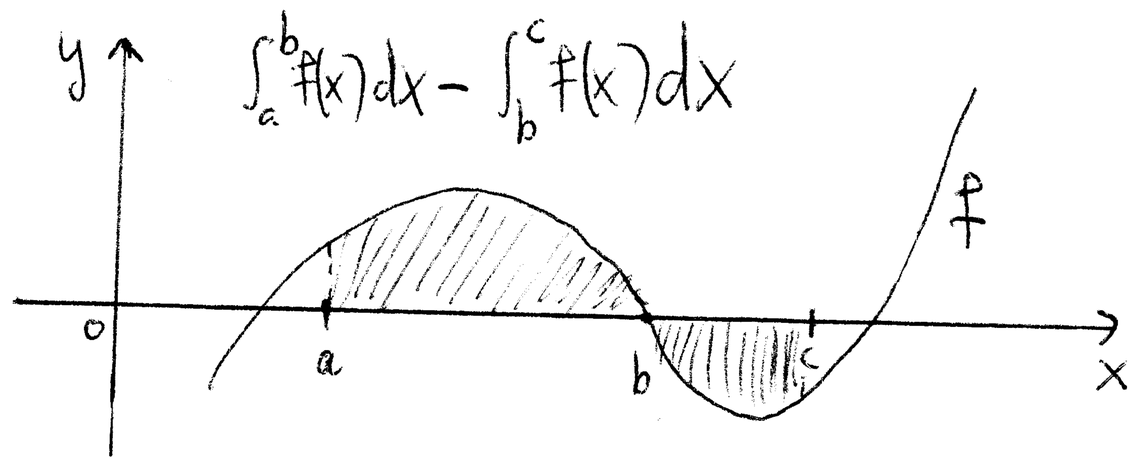


Nach dem ZWS gibt es ein $\xi\in[a,b]$ mit $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)$. Also $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$. $\square$

Def: Falls $a>b$ wird definiert $\int_a^b f(x)dx:=-\int_b^a f(x)dx$, falls das Integral rechts existiert.

Flächeninhalt der schraffierten Fläche



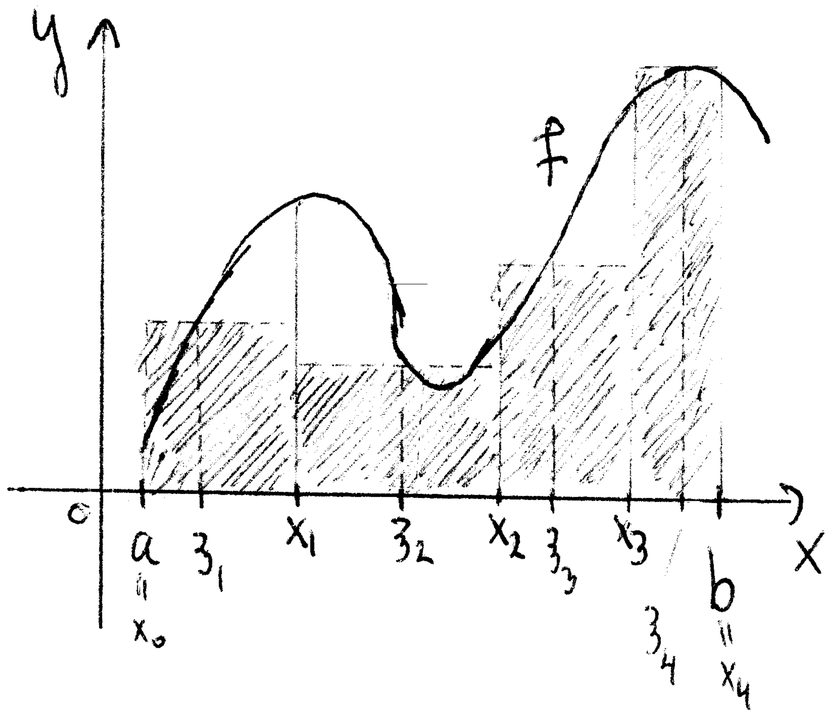


Riemannsche Summen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $Z=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und ξ_k ein Punkt aus dem Intervall $[x_{k-1},x_k]$ für $1\leq k\leq n$.

Sei $\bar{\xi}:=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. Dann heißt

$S(f,Z,\bar{\xi}):=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ Riemannsche Summe von f bezügl. $(Z,\bar{\xi})$.



Satz 1.9: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.
Sei (Z_n,ξ_n) sodass $\lim\limits_{n\to\infty}\|Z_n\|=0$.
Dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}S(f,Z_n,\xi_n)$.

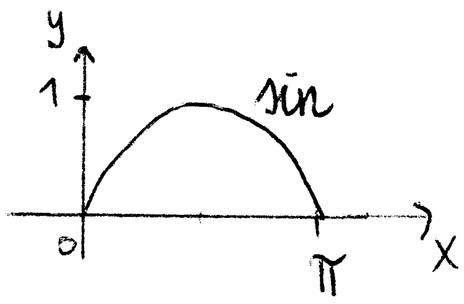
Beweis: Es gilt $\underline{S}(f,Z_n)\leq S(f,Z_n,\xi_n)\leq\overline{S}(f,Z_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$. [s. Skizze, S. 12, unten]

f integrierbar $\overset{\text{Lemma 1.2}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}(f,Z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(f,Z_n)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Aus dem Sandwich Lemma folgt $\lim\limits_{n\to\infty}S(f,Z_n,\xi_n)=\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Beispiel (s. Üb.)

Sei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

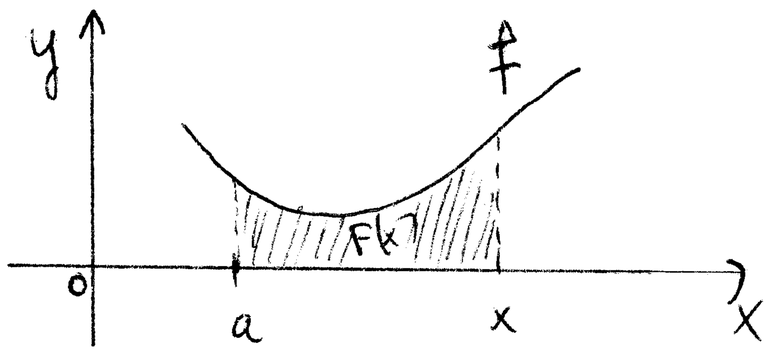


Sei $Z_n=\{0,\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\pi,\pi\}$ und $\xi_n=(\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots,(n-1)\frac{\pi}{n},\pi)$.

Dann gilt $\int_0^\pi\sin(x)\,dx\overset{1.9}{=}\lim\limits_{n\to\infty}S(f,Z_n,\xi_n)\overset{\text{s. Üb.}}{=}2$.

Satz 1.10 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

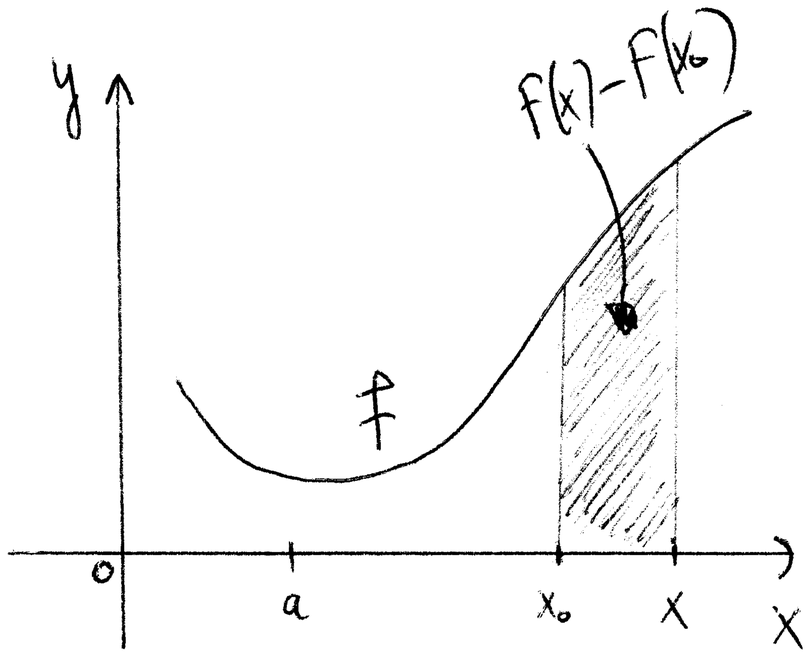
Sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig (I Intervall) und a ein fester Punkt aus I.
Sei $F:I\to\mathbb{R}$, $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$.
Dann ist F diff. auf I und es gilt $F'(x)=f(x)\ \forall x\in I$.



Beweis: Sei $x_0\in I$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt\right)$$

$$\overset{1.5}{=}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt\overset{\text{MWS, 1.8}}{=}\frac{1}{x-x_0}(x-x_0)\,f(\xi_x)$$



$= f(\xi_x)$ für ein ξ_x zwischen x_0 und x.

Daraus folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$.

f stetig in x_0 und $\xi_x \to x_0$ wenn $x \to x_0$.

Also ist F diff. in x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Def: (Stammfunktion)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben [$D \subseteq \mathbb{R}$ offen oder endliche Vereinigung von Intervallen mit ≥ 2 Punkten]

$F: D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn gilt:

F ist diff. auf D und $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in D$.

Bem: Nach dem Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung (1.10) besitzt jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Satz 1.11:

a) Sei F Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. [I Intervall]
Dann ist auch $F+c$ Stammfunktion von f.

b) Seien F_1, F_2 Stammfunktionen von $f: I \to \mathbb{R}$.
Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion [d.h. $F_1 = F_2 + c$]

Beweis: a) $(F+c)' = F' + c' = F' + 0 = f$.

b) $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I \xRightarrow[I \text{ Intervall}]{\text{Korull. 7.8, Ana I}}$

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) - F_2(x) = c \quad \forall x \in I$.

$\square$

Def: Gegeben sei $f: I \to \mathbb{R}$.
Dann bezeichnet $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f. $\int f(x)dx$ heißt unbestimmtes Integral.
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, so schreibt man

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}). \qquad \text{[Siehe Satz 1.11]}$$

Beispiele: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$;

$\int e^x dx = e^x + c$; $\int \sin x dx = -\cos x + c$; $\int \cos x dx = \sin x + c$;

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$; $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+b)dx \overset{a \neq 0}{=} \frac{1}{a} F(ax+b) + c$

lin. Subst.

Ist F_i Stammfunktion von f_i $(i=1,2)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad \text{und} \quad \int \lambda f_1(x)dx = \lambda \int f_1(x)dx.$$

Satz 1.12: Sei F eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (auch mit $F(x)\big|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$ bezeichnet).

Beweis: Nach dem Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung (1.10) ist $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f. Nach 1.11b) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = G(x) + c \ \forall x \in [a,b]$. Daraus folgt

$$F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad \square$$

Beispiele: i) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

ii) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$.

Def: Sei $f: D \to \mathbb{R}$. [D offen oder endliche Vereinigung von Intervallen mit ≥ 2 Punkten]

f heißt stetig differenzierbar wenn f diff. und f' stetig ist.

Satz 113 (partielle Integration)

Seien $u, v: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann:

a) $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$ (unbestimmtes Integral)

b) $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Beweis: Die Produktregel für Ableitungen (Satz 7.2, Ana I) liefert $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Daraus folgt:

a) $\int (u(x)v(x))'\,dx = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \Rightarrow$

$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$

$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$

b) $\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \overset{1.12+1.4}{\Rightarrow}$

$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$

$\square$

Beispiele:

1) $\int x \sin x \, dx$ und $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

- $\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin x}_{u'} dx \overset{P.I.}{=} (-\cos x)x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx =$
$-x\cos x + \sin x + c.$

- $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx \overset{1.12}{=} (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = -\pi \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin \pi}_{0} + 0 - 0 = \pi.$

Bem: Man könnte auch versuchen, das obige Integral $\int x \sin x \, dx$ mit $u' = x$ und $v = \sin x$ zu berechnen:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \underbrace{\int \frac{1}{2}x^2 \cos x \, dx}_{\text{Komplizierter als } \int x \sin x dx}$$

$u' = x$, $v = \sin x$ führt nicht zum Ziel.

2) $\int x^2 e^{2x} dx$.

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^{2x}}_{u'} dx \overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{e^{2x}}_{u'} dx \overset{P.I.}{=}$$

$$\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx\right) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c.$$

Bem: Die Integrationskonstante c wird oft erst am Schluss hinzugefügt.

3) $\int x^7 \ln(2x) dx$.

$$\int \underbrace{x^7}_{u'} \underbrace{\ln(2x)}_{v} dx \overset{PI.}{=} \frac{x^8}{8}\ln(2x) - \int \frac{x^8}{8} \frac{1}{2x} 2 \, dx = \frac{1}{8}x^8 \ln(2x) - \frac{1}{8}\int x^7 dx$$

$$= \frac{1}{8}x^8 \ln(2x) - \frac{1}{64}x^8 = \frac{1}{8}x^8\left(\ln(2x) - \frac{1}{8}\right) + c.$$

4) $\int e^x \sin x\,dx$.

$$\int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v}\,dx \overset{P.I.}{=} e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v}\,dx \overset{P.I.}{=} e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$$

$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$. Daraus folgt

$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$ und $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$.

<u>Bem:</u> Für die zweite P.I im obigen Beispiel wäre die Wahl $u' = \cos x$, $v = e^x$ ungünstig gewesen:

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{\cos x}_{u'}\,dx \overset{P.I.}{=} e^x \sin x - \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\right)$$

$= e^x \sin x - e^x \sin x + \int e^x \sin x\,dx = \int e^x \sin x\,dx$. Wir drehen uns im Kreis!

5) $\int \sin^2 x\,dx$ und $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$.

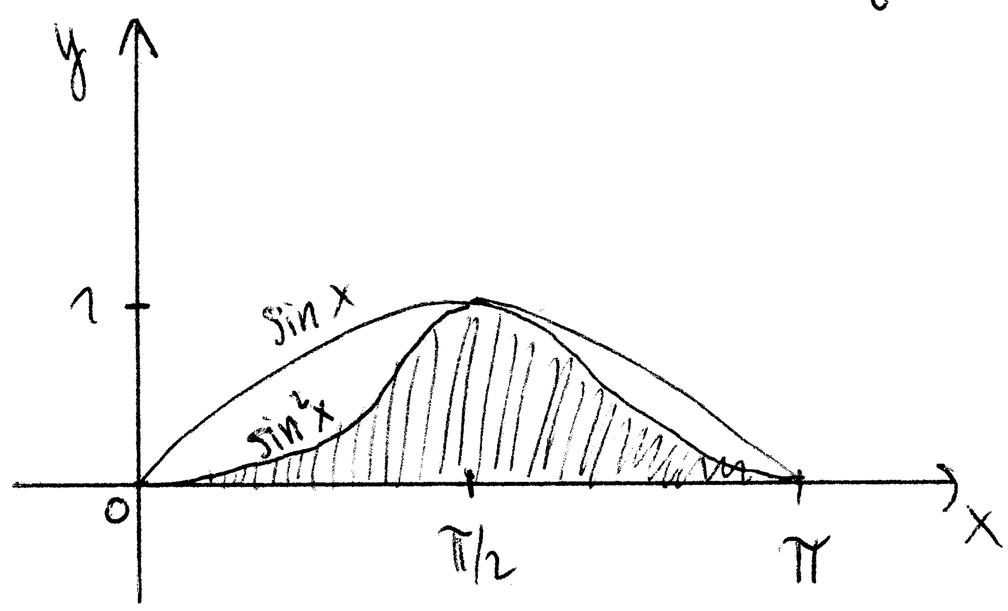
- $\int \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_{v}\,dx \overset{P.I.}{=} -\cos x \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x\,dx =$

$-\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx \overset{\text{Trick}}{=} -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx =$

$-\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx \Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x\,dx$

$\Rightarrow 2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x \Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$.

- $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \overset{1.12}{=} \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi - 0 - 0 + 0) = \pi/2$.



Satz 1.14 (Substitutionsregel)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff. und $g: I\to\mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b])\subseteq I$.

Dann ist $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definiert: $[a,b]\xrightarrow{f} I \xrightarrow{g}\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)$

$t\mapsto g(t)$

Dann gilt:

a) $\boxed{\int g(t)\,dt = \int g(f(x))f'(x)\,dx}$ (unbestimmtes Integral)

Substitution: $t=f(x)$

$\frac{dt}{dx}=f'(x)\Rightarrow dt=f'(x)\,dx$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, dass in der Stammfunktion auf der linken Seite die Unbestimmte t durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

b) $\boxed{\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt = \int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx}$ (bestimmtes Integral)

Substitution: $t=f(x)$ Für $x=a$ ist $t=f(a)$

$dt=f'(x)\,dx$ Für $x=b$ ist $t=f(b)$.

Beweis: Sei G eine Stammfunktion von g, also $G'(t)=g(t)\ \forall t\in I$ [Siehe Bem. auf der Seite 14].

a) $\int g(f(x))f'(x)\,dx \overset{G'=g}{=} \int G'(f(x))f'(x)\,dx \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int (G\circ f)'(x)\,dx = (G\circ f)(x)+c$

$= G(f(x))+c \underset{t=f(x)}{=} G(t)+c \underset{G'=g}{=} \int g(t)\,dt.$

b) $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx \underset{\text{Satz 1.12:}}{=} G(f(x))\Big|_a^b = G(f(b))-G(f(a)) \underset{\text{Satz 1.12: } G'=g}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt$

Satz 1.12: $(G(f(x)))' = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x)$

$\square$

Beispiele:

1) $\int_{t=7}^{10} t(t-3)^{25}\,dt.$

$$\int_{t=7}^{10} t(t-3)^{25}\,dt \underset{\substack{t=x+3\\ dt=1dx=dx}}{=} \int_{x=4}^{7}(x+3)x^{25}\,dx = \int_{x=4}^{7}\left(x^{26}+3x^{25}\right)dx = \left(\frac{x^{27}}{27}+3\frac{x^{26}}{26}\right)\Big|_4^7$$

$$= \frac{7^7}{27}+3\cdot\frac{7^{26}}{26}-\frac{4^{27}}{27}-3\cdot\frac{4^{26}}{26}.$$

2) $\int_{t=1}^{4}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt.$

$$\int_{t=1}^{4}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx\\ \sqrt{t}=|x|}}{=} \int_{x=1}^{2}\frac{\sin(|x|)}{|x|}2x\,dx = \int_{x=1}^{2}\frac{\sin x}{x}2x\,dx = 2\int_{x=1}^{2}\sin x\,dx$$

$$= -2\cos x\Big|_1^2 = 2(\cos 1-\cos 2).$$

3) $\int 3te^{t^2+4}\,dt.$

$$\int 3te^{t^2+4}\,dt \underset{\substack{x=t^2+4\\ dx=2t\,dt}}{=} \int e^x\cdot\frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}\int e^x\,dx = \frac{3}{2}e^x+c \underset{\text{resubstituieren}}{=} \frac{3}{2}e^{t^2+4}+c.$$

4) $\int \sin^3(2x)\cos(2x)\,dx.$

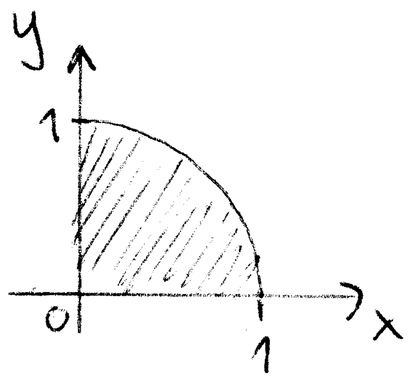
$$\int \sin^3(2x)\cos(2x)\,dx \underset{\substack{t=\sin(2x)\\ dt=2\cos(2x)dx}}{=} \int t^3\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4}+c = \frac{t^4}{8}+c$$

$$\underset{\text{resubstituieren}}{=} \frac{1}{8}\sin^4(2x)+c.$$

5) $\int \tan(x)\,dx.$

$$\int \tan(x)\,dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\sin x\,dx}}{=} \int\frac{-dt}{t} = -\ln(t)+c \underset{\text{resubstituieren}}{=} -\ln(\cos x)+c.$$

6) $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt.$



$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\substack{t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx}}{=} \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x)\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \sqrt{\sin^2 x}\,\sin x\,dx =$$

$$-\int_{\pi/2}^0 |\sin x|\cdot(\sin x\,dx) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \overset{\text{S. Bspl. 5, P.I.}}{=} \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

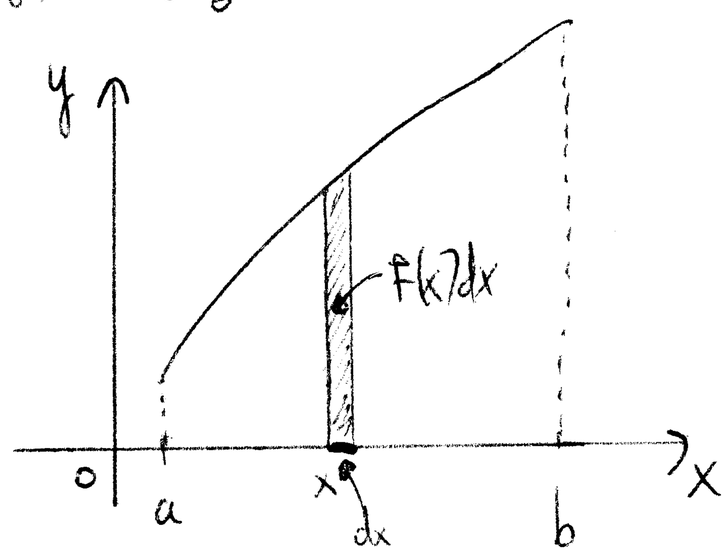
7) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \underset{\substack{x=e^t \\ dx=e^t dt}}{=} \int \frac{\ln(e^t)}{e^{2t}}\,e^t\,dt = \int t e^{-t}\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} -te^{-t}-e^{-t}+C$$

$$= -e^{-t}(t+1)+C \underset{\text{resubstituieren}}{=} -\frac{1}{x}(\ln(x)+1)+C.$$

Frage: Was ist dx?

Geometrisch:



$\int_a^b f(x)\,dx$ = Summe von den $f(x)dx$ für x zwischen a und b

= Flächeninhalt.

Aber: dx einzeln betrachtet existiert überhaupt nicht:

dx ist weder positiv, noch null.

Wir wollen trotzdem nicht auf diese Schreibweise mit dx verzichten, denn die Substitutionsregel

$\int g(t)\,dt = \int g(f(x))\,f'(x)\,dx$ ist besonders leicht anzuwenden.

$t=f(x),\ dt=f'(x)dx$

Stammfunktionen von rationalen Funktionen

Def: Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ zwei beliebige Polynome sind $[a_i, b_j \in \mathbb{R}\ \forall i,j]$. $\neq 0$ $\neq 0$

$\int f(x)dx$ kann (zumindest theoretisch) mit der sogenannten Methode der <u>Partialbruchzerlegung</u> gerechnet werden.

1°) Polynomdivision $p(x)/q(x)$ falls $\deg(p) \geq \deg(q)$ durchführen.

2°) $q(x)$ in ein Produkt von linearen und quadratischen irreduziblen Faktoren zerlegen (geht nur theoretisch wenn $\deg(q) \geq 5$).

3°) Mit dem richtigen Ansatz $p(x)/q(x)$ zerlegen und $\int f(x)dx$ berechnen [spezielle Beispiele, s. Übung].

Bem: Wenn $\deg(q) \leq 2$ führt die Methode immer zum Ziel.

Beispiele: i) $\int \frac{2x+1}{x^2+2} dx$.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx = \ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$\ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x/\sqrt{2})^2} dx \underset{\substack{t = x/\sqrt{2} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}dx}}{=} \ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\sqrt{2}\, dt = \ln(x^2+2) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t) = \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

ii) $\int \frac{2x+7}{x^2-5x+6} dx$. $\quad \frac{2x+7}{x^2-5x+6} = \frac{2x+7}{(x-2)(x-3)} \overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$

$A, B \in \mathbb{R}$ zu bestimmen

$$\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)} \iff 2x+7=(A+B)x-(3A+2B)$$

23

$$\forall x \iff \begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=-7 \end{cases} \iff A=-11,\ B=13.$$ Daraus folgt

$$\int \frac{2x+7}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-11}{x-2}+\frac{13}{x-3}\right)dx = -11\ln(x-2)+13\ln(x-3)+C.$$

Uneigentliche Integrale

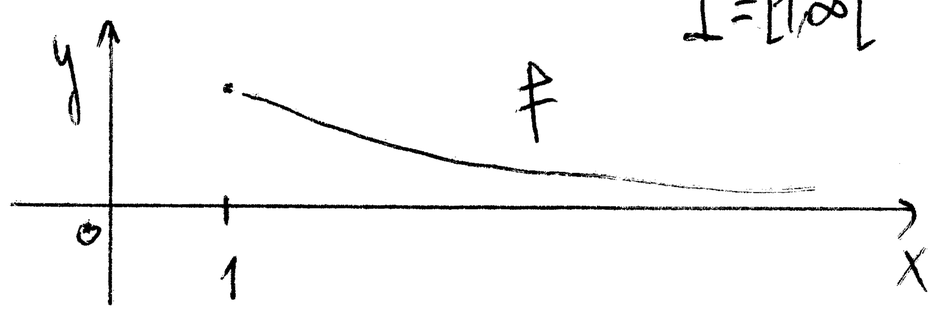
Bisher haben wir nur den Fall $\int_a^b f(x)\,dx$ betrachtet, wo $f:\underbrace{[a,b]}_{\text{Kompaktes Intervall}} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist.

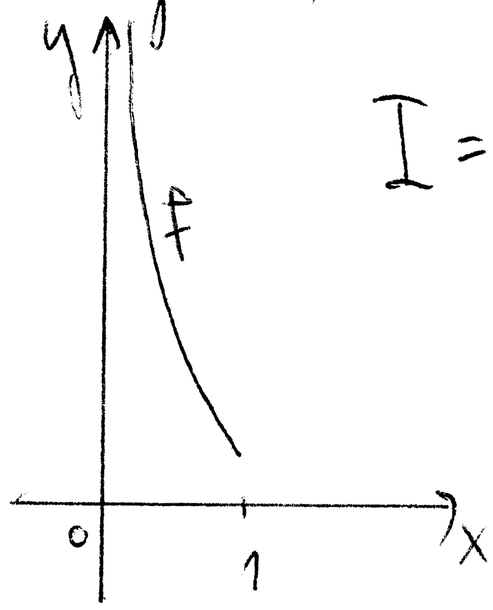
Sei $f: I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.

Ziel: $\int_I f(x)\,dx$ zu definieren (wenn es geht).

Typische Situationen

$I=[1,\infty[$





$I=]0,1]$

Definitionen:

1) • Sei $f:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ integrierbar über $[a,R]$ $\forall R\geq a$. Betrachte den Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$. Existiert dieser Grenzwert, so wird es mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral).

- Sei $f:]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[R, a]$ $\forall R \leq a$.

Analog: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx := \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{a} f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

- Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a, b]$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

Sei $c \in \mathbb{R}$. Falls $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ und $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ beide existieren, dann setzt man $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$. [Diese Def. von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ist unabhängig von der Auswahl von c]

2) • Sei $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a, t]$ $\forall t \in [a, b[$.

Betrachte $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Existiert dieser Grenzwert, so wird es mit $\int_{a}^{b} f(x)dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral).

- Sei $f:]a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[t, b]$ $\forall t \in]a, b]$.

Analog: $\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

- Sei $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ für alle $\tilde{a}, \tilde{b}$ mit $a < \tilde{a} \leq \tilde{b} < b$.

Sei $c \in]a, b[$. Falls $\int_{a}^{c} f(x)dx$ und $\int_{c}^{b} f(x)dx$ beide existieren, dann setzt man $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$. [Def. unabh. von der Auswahl von c]

Def: • Das Integral $\int_{I} f(x)dx$ heißt konvergent (oder konvergiert) falls $\int_{I} f(x)dx$ existiert.

- Das Integral $\int_{I} f(x)dx$ heißt divergent (oder divergiert)

falls $\int_I f(x)dx$ nicht existiert.

Beispiele:

1) Sei $s \in \mathbb{R}$. $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ konvergiert $\Leftrightarrow s > 1$.

i) $s > 1$. $\int_1^R \frac{1}{x^s}dx = \int_1^R x^{-s}dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^R = \frac{R^{1-s}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{R^{s-1}}$

$\to \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot 0 = \frac{1}{s-1}$ $(R \to \infty)$. Also konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ und

$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$.

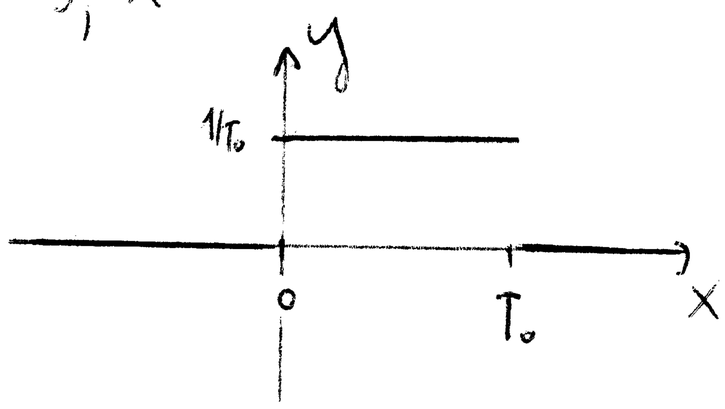
ii) $s = 1$. $\int_1^R \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_1^R = \ln(R) - \ln(1) = \ln(R) \to \infty$ $(R \to \infty)$.

Also divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$.

iii) $s < 1$. $\frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x}$ $\forall x \geq 1 \Rightarrow \int_1^R \frac{1}{x^s}dx \geq \int_1^R \frac{1}{x}dx = \ln(R)$ $\forall R > 1$

$\Rightarrow \int_1^R \frac{1}{x^s}dx \to \infty$ $(R \to \infty)$. Also divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$.

2) Sei $T_0 > 0$ und $f(x) = \begin{cases} 1/T_0 & \text{für } 0 \leq x \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$



Konvergiert $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$?

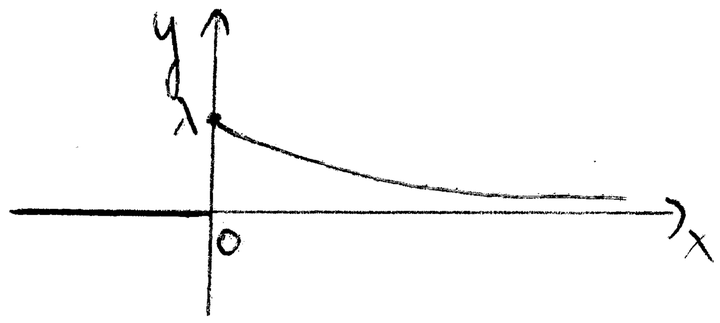
- Sei $R > T_0$. $\int_0^R f(x)dx = \int_0^{T_0} f(x)dx + \int_{T_0}^R f(x)dx = \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0}dx + \int_{T_0}^R 0\,dx = \frac{1}{T_0}T_0 + 0 = 1$.

  Also $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx = 1$.

- Sei $R < 0$ $\int_R^0 f(x)dx = \int_R^0 0\,dx = 0$. Also $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 f(x)dx = 0$.

Es folgt $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx = 0 + 1 = 1$.

3) Sei $\lambda > 0$ und $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{"} \quad x < 0. \end{cases}$



Konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$?

Sei $R > 0$. $\int_0^R f(x)\,dx = \int_0^R \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^R = 1 - e^{-\lambda R} \to 1 - 0 = 1 \quad (R \to \infty)$.

Also $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx = 1$. Wie im obigen Beispiel hat man $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$. Also $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0 + 1 = 1$.

<u>Satz 1.15</u> (Majoranten- und Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale, ohne Beweis).

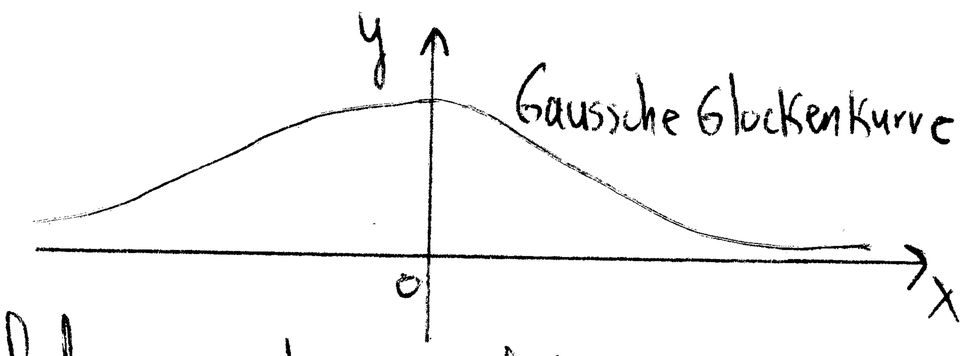
Sei $f: [a, \infty[$ integrierbar über $[a, R]$ $\forall R \geq a$. Dann:

a) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert falls $\exists s, K, c \in \mathbb{R}$ mit $K \geq a$ und $s > 1$ sodass $|f(x)| \leq \frac{c}{x^s}$ $\forall x \geq K$. [Major. Krit.]

b) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ divergiert falls $\exists s, K, c \in \mathbb{R}$ mit $K \geq a$ und $s \leq 1$ und $c > 0$ sodass $f(x) \geq \frac{c}{x^s}$ $\forall x \geq K$. [Minor. Krit].

<u>Beispiele:</u>

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ konvergiert.



Da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ eine gerade Funktion ist reicht es z.z, dass $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ konvergiert.

$e^x = 1 + x + x^2/2! + \ldots \geq x \;\; \forall x > 0 \Rightarrow e^{x^2/2} \geq x^2/2 \;\; \forall x > 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right| =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e^{x^2/2}} \underset{x>0}{\leq} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x^2} \;\; \forall x \geq 1.$

Nach dem Maj. Krit (mit $s=2$, $K=1$, $c=2/\sqrt{2\pi}$) konvergiert $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$, und damit auch $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$.

Bem: Man kann zeigen, dass $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1$.

2) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ konvergiert. $\left|\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\right| = \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall x \geq 1$.

Nach dem Maj. Krit (mit $s=2$, $K=1$, $C=1$) konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$.

3) $\int_0^\infty \frac{x^2+3}{x^3+x^2+1}\,dx$ divergiert. $\left|\frac{x^2+3}{x^3+x^2+1}\right| = \frac{x^2+3}{x^3+x^2+1} \geq \frac{x^2}{x^3+x^2+1} \underset{x\geq 1}{\geq} \frac{x^2}{x^3+x^3+x^3}$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}$ $\forall x \geq 1$. Nach dem Min-Krit. (mit $s=1$, $K=1$, $C=\frac{1}{3}$) divergiert $\int_0^\infty \frac{x^2+3}{x^3+x^2+1}\,dx$.

Für das Konvergenzverhalten von Reihen hilft manchmal das folgende Kriterium:

Satz 1.16: (Integralkriterium für Reihen)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f: [m,\infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq m$. Dann:

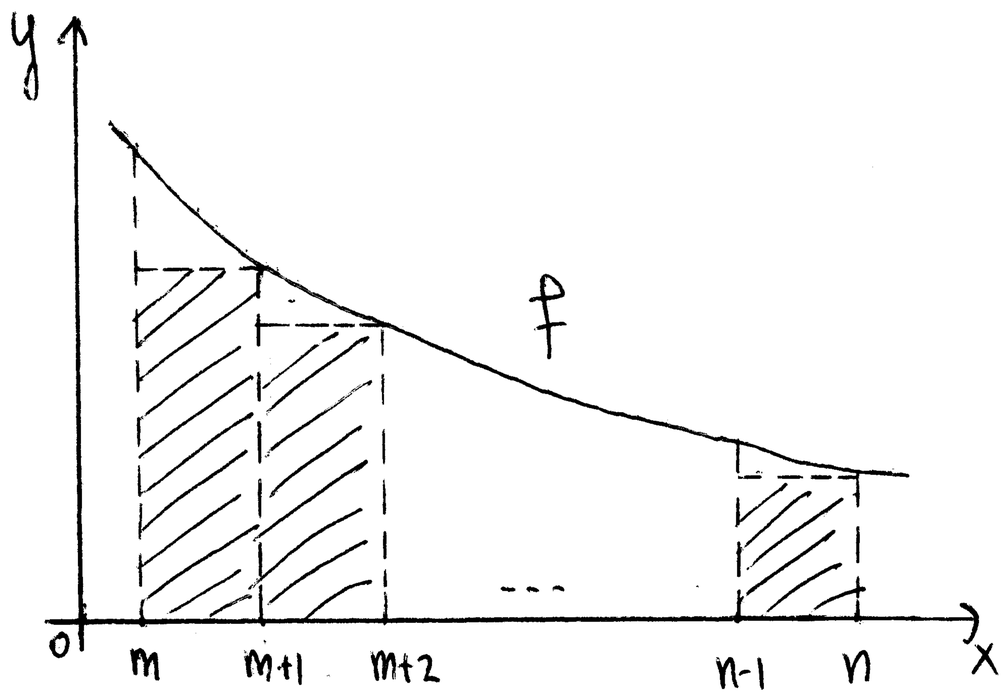
a) $\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m+1$.

b) $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\int_m^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

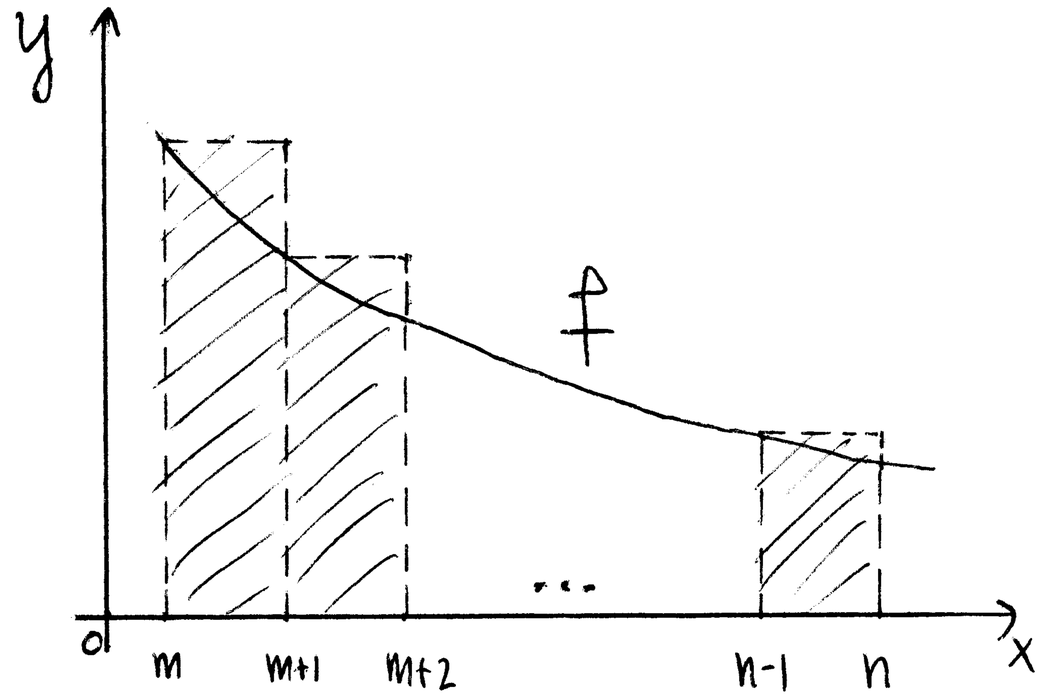
[Beachte: $\int_m^n f(x)\,dx$ existiert da f monoton ist].

Beweis:

a)



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m+1}^{n} f(k)$.



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m}^{n-1} f(k)$.

b) "$\Rightarrow$" Sei $s := \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $F(R) = \int_m^R f(x)\,dx$, $(R \geq m)$.

F ist monoton steigend (denn $f \geq 0$) und $F(R) \overset{a)}{\leq} s \quad \forall R \geq m$.

Also existiert $\lim_{R\to\infty} \int_m^R f(x)\,dx$ (und $\lim_{R\to\infty} \int_m^R f(x)\,dx = \sup_{R\in[m,\infty[} F(R)$).

D.h. $\int_m^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

"$\Leftarrow$" Sei $a := \int_m^\infty f(x)\,dx$. $\sum_{k=m}^{n} f(k) \overset{a)}{\leq} a \quad \forall n \geq m+1 \overset{\text{Satz 2.4, Ana I}}{\Longrightarrow} \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert. $\square$

Beispiel: Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 0$.

Bekannt aus Ana I:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert $\xRightarrow{\text{Min. Krit. für Reihen}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert für $\alpha < 1$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert $\xRightarrow{\text{Maj. Krit. für Reihen}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha \geq 2$.

Bleibt der Fall $\alpha \in]1,2[$ zu untersuchen.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\overset{1.16}{\Longleftrightarrow}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ konvergiert.

$\alpha > 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ konvergiert (s. Beispiel 1), S.25).

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $1<\alpha<2$.

Längen und Volumen

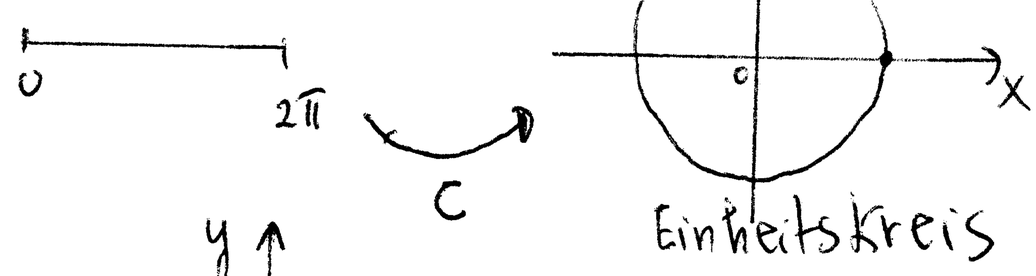
1) Länge einer Kurve

Def: Eine Abbildung $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt
$t \longmapsto (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$

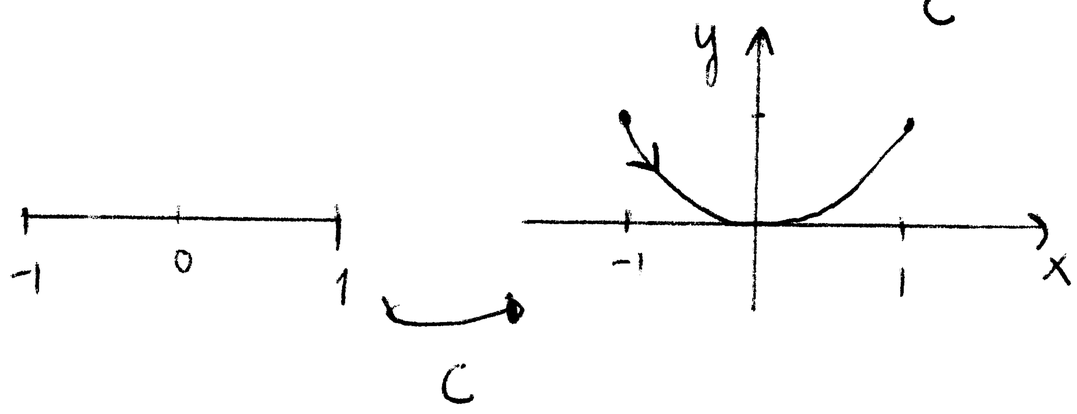
Intervall

Kurve falls jedes $c_i: I \to \mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$ stetig diff. ist.

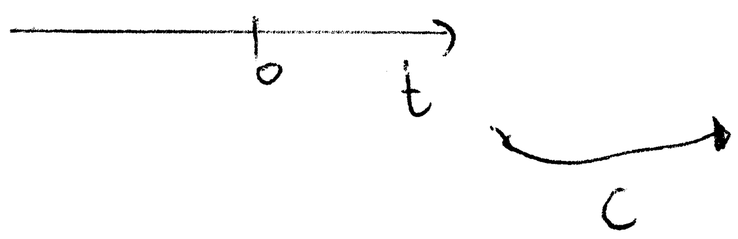
Beispiele: a) $c: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

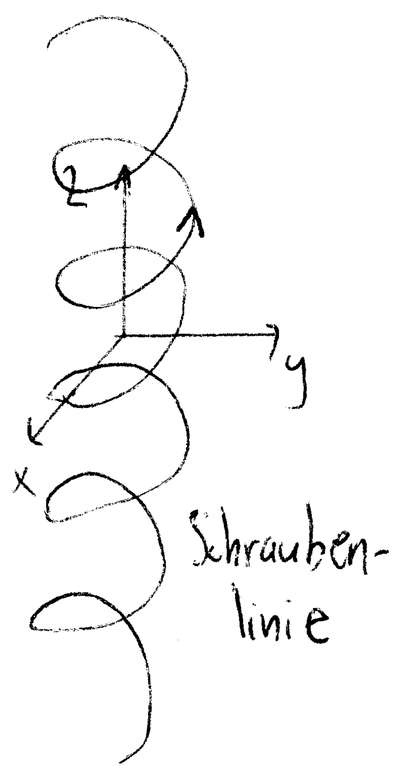


b) $c: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
$t \longmapsto (t, t^2)$



c) $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
$t \longmapsto (\cos t, \sin t, t)$

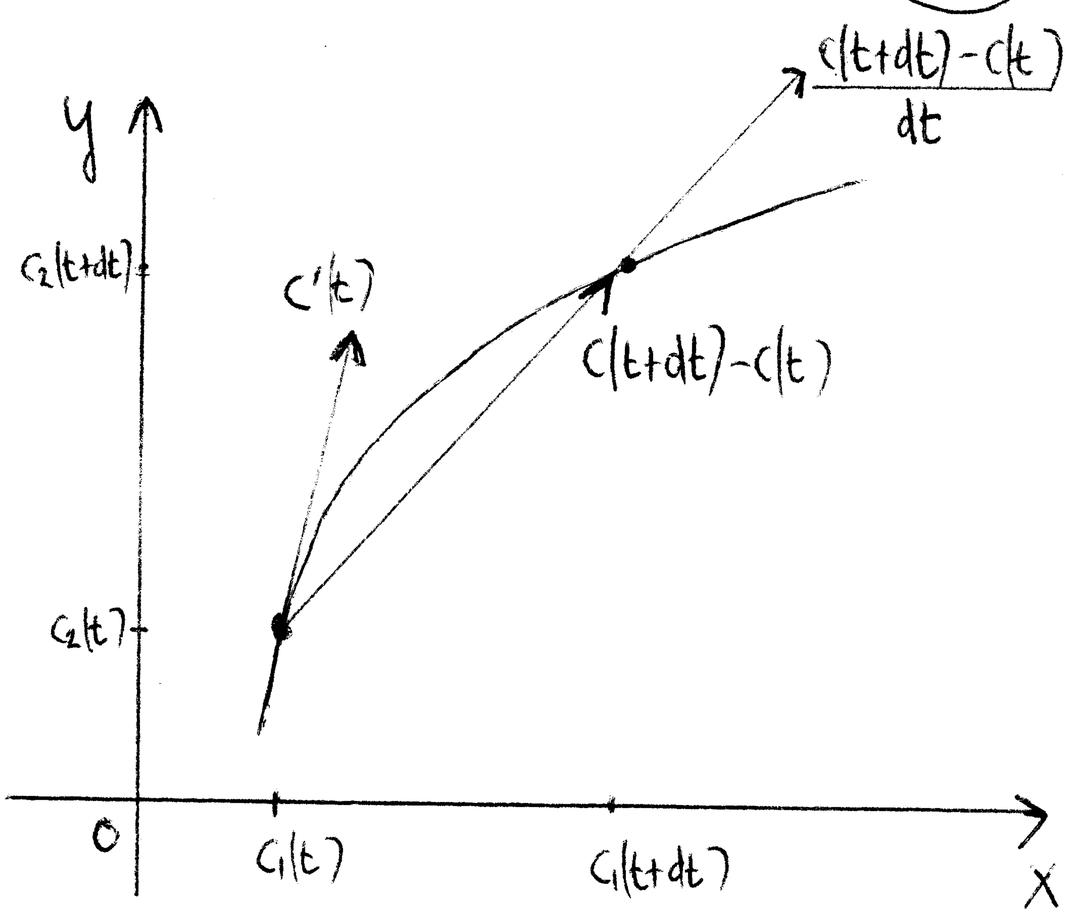




Bem: Eine Kurve $c: I \to \mathbb{R}^n$ braucht nicht notwendig injektiv zu sein.

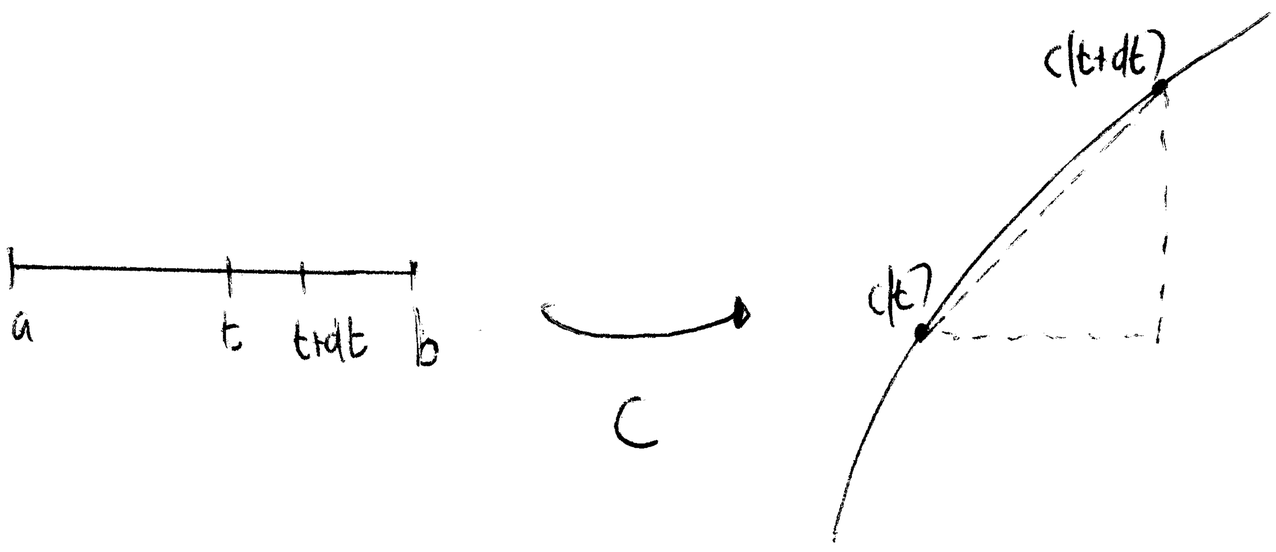
Def: Sei $c: I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

a) $c'(t) := (c_1'(t), c_2'(t), \dots, c_n'(t))$ heißt Tangentialvektor der Kurve c zum Parameter t. [Falls $c(t)$ die Bahn eines Teilchens beschreibt, dann ist $c'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit t.



b) $\|c'(t)\| := \sqrt{c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2 + \dots + c_n'(t)^2}$ heißt die Norm von $\|c'(t)\|$.

Länge von $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$



Länge der "Hypothenuse" im $\mathbb{R}^n$

$$= \|c(t+dt) - c(t)\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (c_i(t+dt) - c_i(t))^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i(t+dt) - c_i(t)}{dt}\right)^2 dt^2}$$

$$\simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)^2}\, dt = \|c'(t)\|.$$

Def: Die Länge von $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wird definiert durch

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\|\, dt.$$

Beispiel:

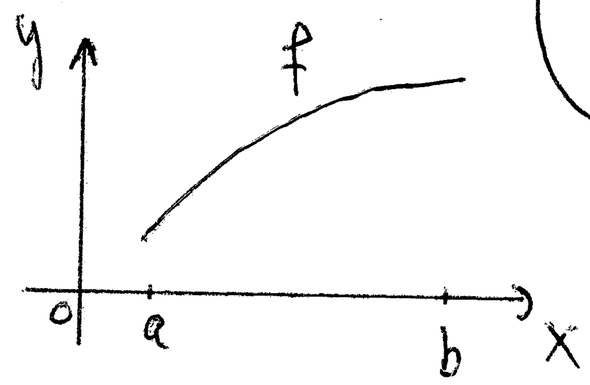
$c: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$

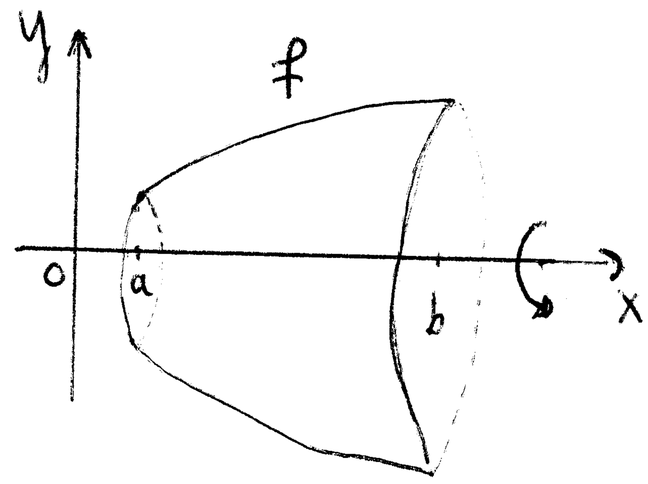
$$L(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos t)\|\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

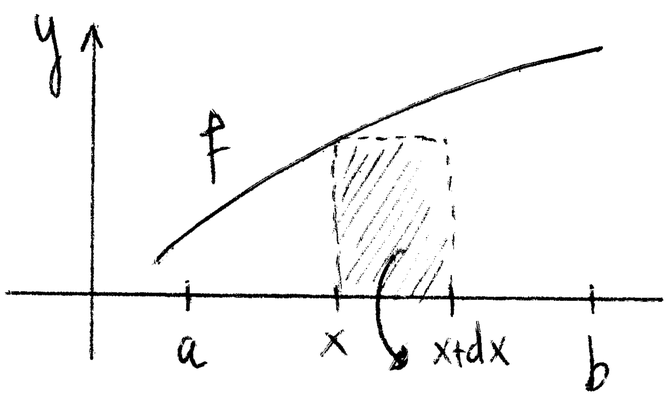
2) Volumen eines Rotationskörpers



Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $f\geq 0$. Lässt man den Graphen von f im Bereich $[a,b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein Rotationskörper.



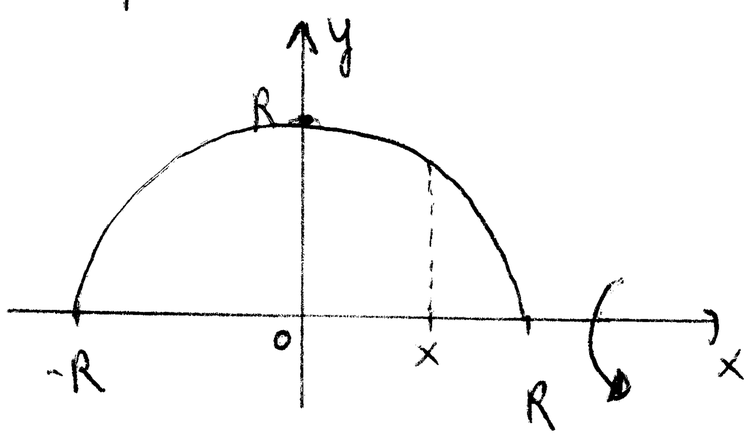
Volumen = ?



Volumen des Zylinders mit Radius $f(x)$ und Höhe dx ist $\pi f(x)^2$. Daher die folgende Def:

Def: $V=\int_a^b \pi f(x)^2\,dx = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$

Beispiel: Volumen einer Kugel vom Radius R.



$$f(x)\overset{\text{Pyth.}}{=}\sqrt{R^2-x^2},\quad -R\leq x\leq R.$$

$$V=\pi\int_{-R}^{R} f(x)^2\,dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-R^3/3+R^3-R^3/3\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$